Série d'exercices n° 1

1 Formules de Taylor

Exercice 1

1. Soit $\alpha > 0$. Montrer que
$$\left|\cos(\alpha) - 1 + \frac{\alpha^2}{2!} - \frac{\alpha^4}{4!}\right| \leq \frac{\alpha^5}{5!}$$
2. En déduire que
$$\frac{337}{384} - \frac{1}{3840} \leq \cos\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{337}{384} + \frac{1}{3840}$$

Exercice 2

1. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ entre $a = 16$ et $b = 17$.
2. Montrer que $\dfrac{31}{128}$ est une valeur approchée de $\dfrac{1}{\sqrt{17}}$ à 5×10^{-4} près.

Exercice 3

Soit f une fonction de classe C^3 sur un intervalle I. Soit $x \in \mathrm{int}(I)$.
En utilisant la formule de Taylor-Young, calculer
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^3}\left[f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)\right]$$

Exercice 4

1. Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leq \frac{|x|^{n+1}e^{|x|}}{(n+1)!}$$
2. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

Exercice 5

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sin(x)$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \mathrm{ch}(x)$

2 Fonctions convexes

Exercice 6

Montrer que, pour tous réels strictement positifs $(x_i)_{1\leq i\leq n}$, on a

1. $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n\sum_{i=1}^{n} x_i^2$
2. $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geq n^2$
3. $\displaystyle\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1} \geq n$
4. $\displaystyle(x_1x_2\ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

Exercice 7

Soient $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

1. En utilisant la concavité de la fonction $\ln$, montrer que $\quad ab \leq \dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q} \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$.
2. En déduire l'inégalité de Hölder, donnée par

$$\sum_{k=1}^{n} a_kb_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \forall a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n \in \mathbb{R}_+^*$$

Exercice 8

Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $a \in I$. On suppose que f est dérivable en a. Montrer que si $f'(a)=0$ alors f admet un minimum global en a.

Exercice 9

Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $a \in I$. Montrer que si f admet un maximum global en a, alors f est constante sur I.

Exercice 10

Soit $f : I \to J$ une fonction continue bijective. On suppose que f est convexe, que peut-on dire de f^{-1} ?

Exercice 11

Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction concave.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que $f(x+y) \leq f(x)+f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 12

Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction concave, dérivable et croissante sur $[0,+\infty[$.

1. Montrer que $\forall x \geq 1, \quad f(x+1)-f(x) \leq f'(x) \leq f(x)-f(x-1)$
2. On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f'(k) - f(n)$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f'(k) - f(n+1)$. Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes.
3. On prend $f(x)=\ln(x)$. Soit $\gamma = \lim u_n$. Calculer γ à 10^{-2} près.